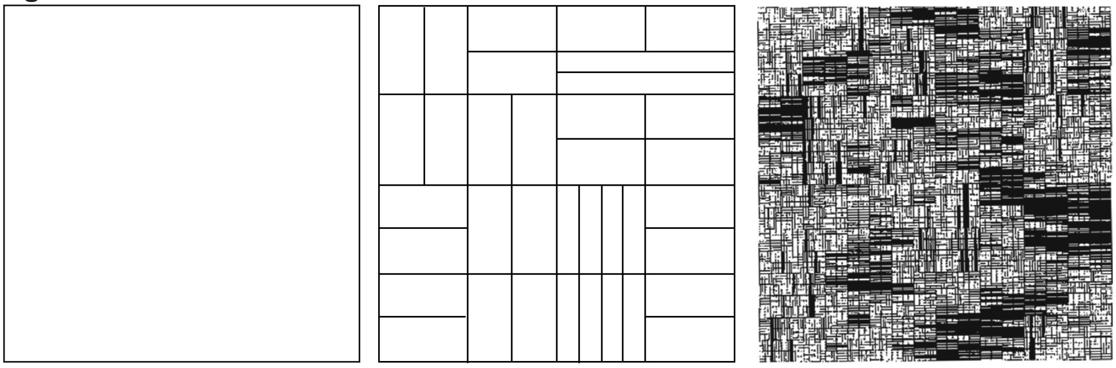
Halvering van vlakken

In figuur 1 zie je enkele delen van de totstandkoming van een kunstwerk van Pavel Rudolf.

figuur 1



Het kunstwerk is gemaakt volgens een bepaald proces: “halvering van vlakken”. De kunstenaar is begonnen met een vierkant van 24 bij 24 cm: zie $n = 0$ in figuur 1. Dat vierkant heeft hij in twee even grote rechthoeken verdeeld. Beide rechthoeken heeft hij weer in twee even grote delen verdeeld, enzovoort. Bij elke volgende fase heeft hij elke rechthoek[1] met een horizontale of een verticale lijn in twee gelijke delen verdeeld. De keuze voor een horizontale of verticale lijn is per rechthoek willekeurig door de kunstenaar gemaakt. Er is zo een serie plaatjes ontstaan. Elk volgend plaatje bestaat uit steeds meer rechthoeken.
Bij het tweede plaatje in figuur 1 hoort dan $n = 5$. Voor het aantal rechthoeken A_n in het n-de plaatje geldt de volgende recursieve formule:

$$A_n = 2 \cdot A_{n-1} \text{ met } A_0 = 1$$

Het derde plaatje in figuur 1 (met $n = ?$) bestaat uit 8192 rechthoeken.

3p **16** Bereken welke waarde van n bij het derde plaatje in figuur 1 hoort.

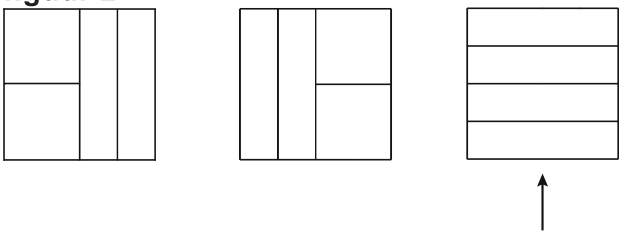
De oppervlakte per rechthoek wordt bij elke fase steeds kleiner. We gaan weer uit van een vierkant van 24 bij 24 cm met $n = 0$.

4p **17** Bereken vanaf welke waarde van n de oppervlakte per rechthoek kleiner dan 1 cm^2 is.

noot 1 Soms ontstaan er vierkanten: een vierkant is ook een rechthoek en telt dus mee bij het aantal rechthoeken.

Bij het verdelen zijn er verschillende mogelijkheden: bij elke fase kan voor elke rechthoek gekozen worden om die met een horizontale of een verticale lijn in tweeën te delen.
Ga uit van het linker plaatje in figuur 1. Hier hoort dus $n = 0$ bij. In figuur 2 zie je drie mogelijke plaatjes bij $n = 2$.

figuur 2

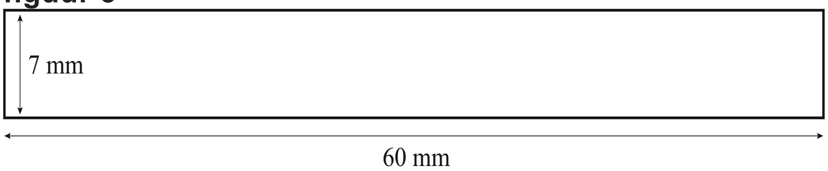


We gaan nu uit van het meest rechtse plaatje met $n = 2$ (aangeduid met een pijl).

4p **18** Onderzoek hoeveel verschillende plaatjes met $n = 4$ hiervan gemaakt kunnen worden.

In figuur 1 zie je dat sommige vlakken in het rechter plaatje helemaal zwart geworden zijn doordat de lijnen zo dicht bij elkaar lopen dat er geen wit meer overblijft. Het vlak is dan volgelopen met zwart. Om inzicht te krijgen in het proces van vollopen, onderzoeken we hoe dit verloopt bij onderstaande rechthoek. Zie figuur 3.

figuur 3



Neem aan dat in de rechthoek van figuur 3 de hoogte van het wit 7 mm is en de breedte 60 mm bedraagt. Als we deze rechthoek voor de eerste keer met een horizontale lijn van 0,5 mm dik in tweeën delen, is de totale hoogte van het overblijvende wit 6,5 mm. Bij elke volgende fase verdelen we elke rechthoek weer met een even dikke horizontale lijn in tweeën.

3p **19** Bereken na hoeveel keer verdelen er geen wit meer overblijft.